EPFL

Leçon 4.1
Oscillateur 1D
Permanent Périodique

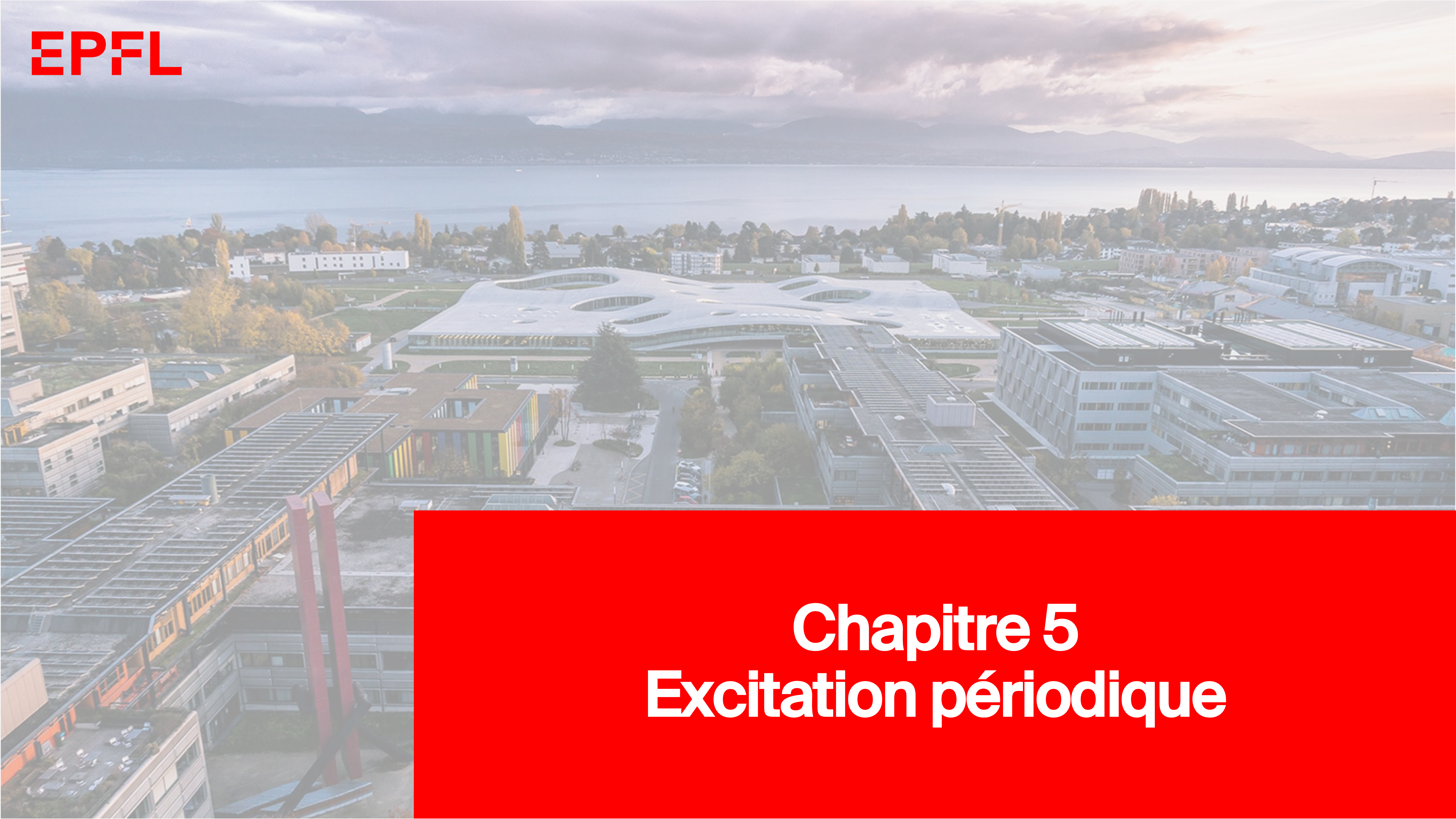
ME-332 – Mécanique Vibratoire

Prof. Guillermo Villanueva

École
polytechnique
fédérale
de Lausanne

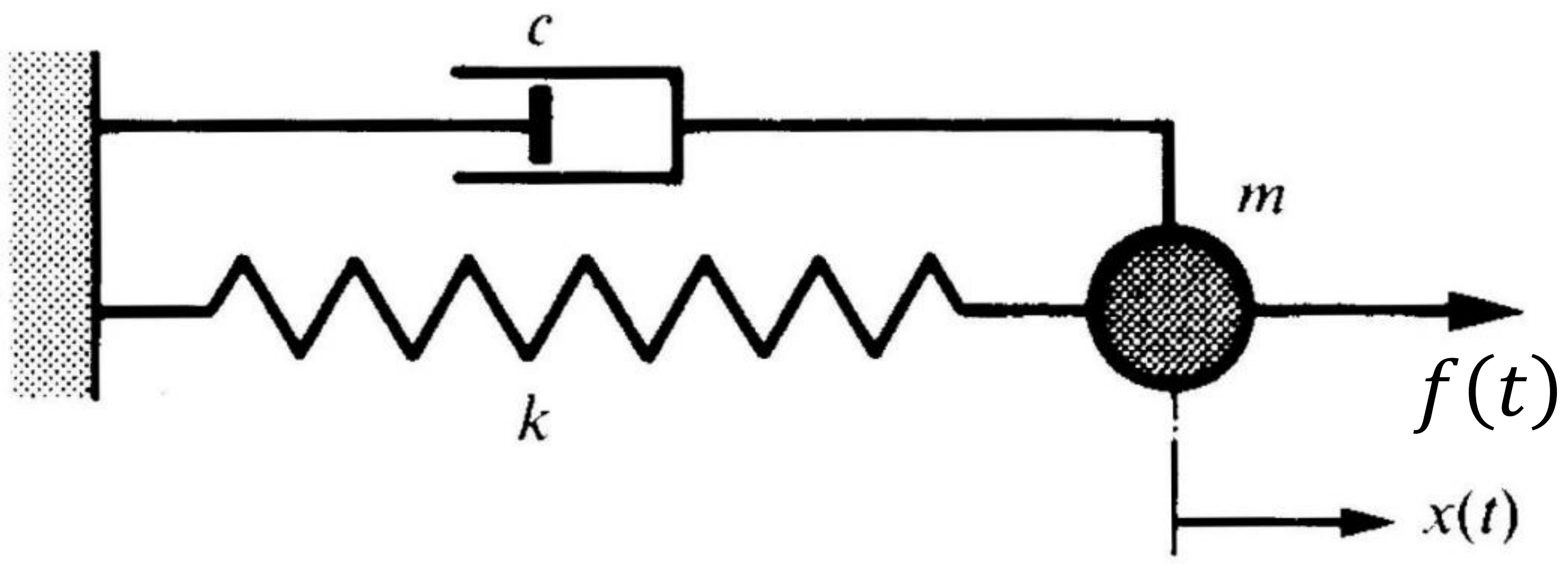
Introduction

- Régime forcé périodique
- Décomposition de la force
- Solution
- Solution en notations complexes
- Exemples de solutions



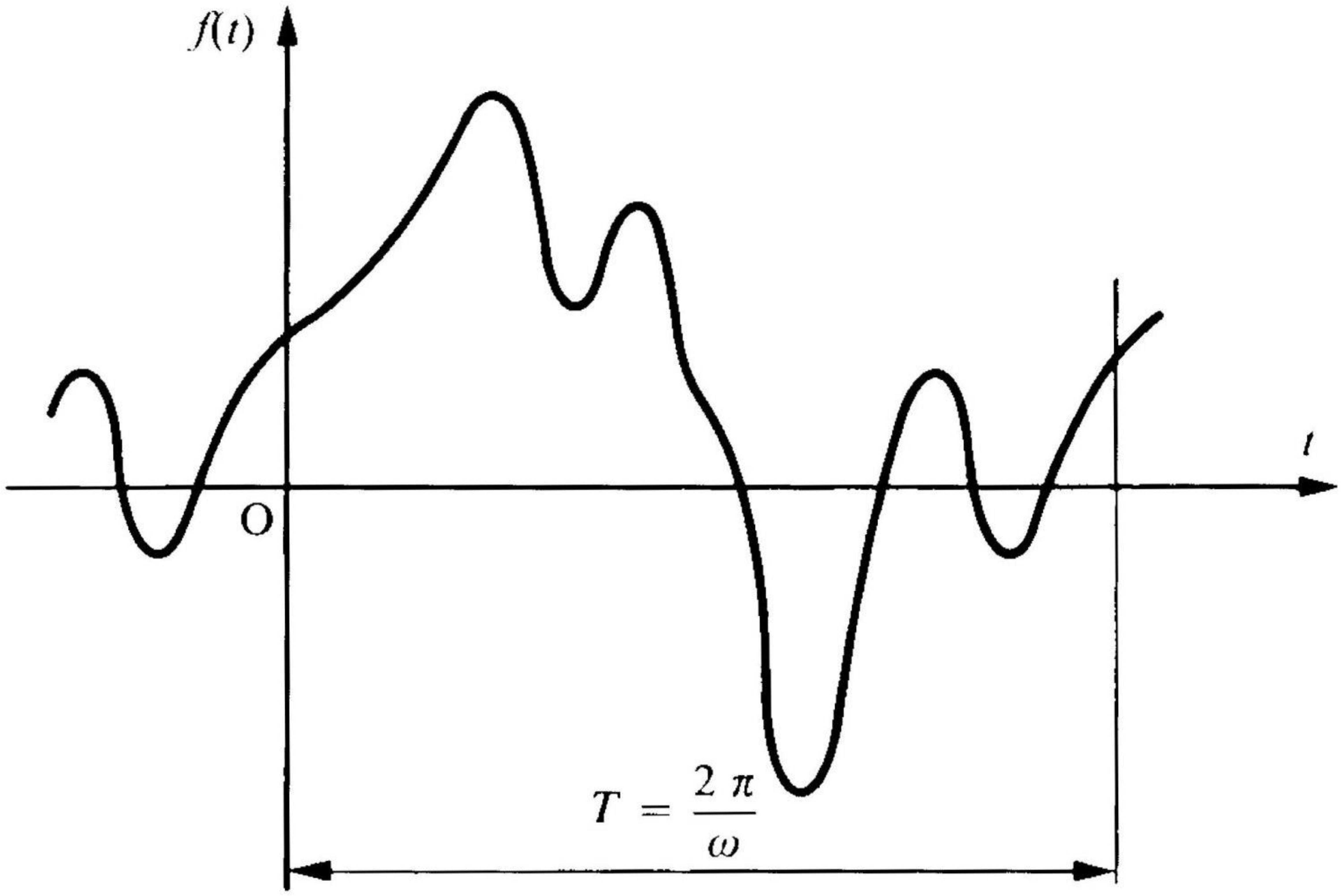
Chapitre 5
Excitation périodique

Régime permanent périodique

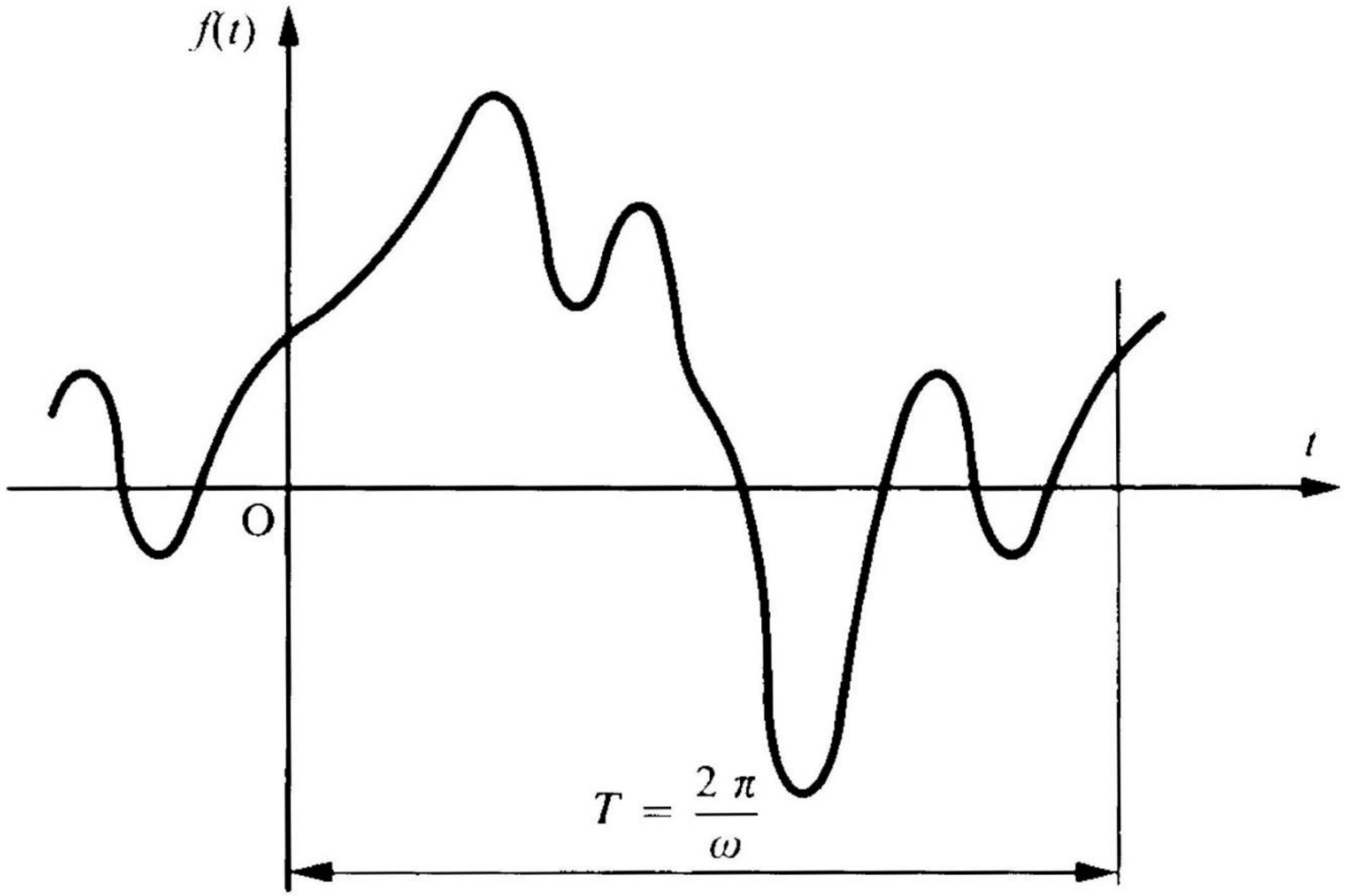


Régime forcé périodique de l'oscillateur élémentaire

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t) = f(t+T)$$



Décomposition en série de Fourier de $f(t)$



Période de la force d'excitation

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Force externe décomposée en *série de Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{2}F_0 + \sum_{n}^{\infty}\left(A_n \cos n\,\omega t + B_n \sin n\,\omega t\right) \quad (5.1)$$

Coefficients de la série de Fourier

$$\begin{cases} F_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\ A_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos n\,\omega t\,\mathrm{d}t \\ B_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t \end{cases} \quad (5.2)$$

Décomposition en série de Fourier de $f(t)$

Coefficients de la série de Fourier

$$\begin{cases} F_0 = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t \\ A_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\cos n\,\omega t\,\mathrm{d}t \\ B_n = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)\sin n\,\omega t\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{5.2}$$

Fonctions $f(t)$ *paires* et *impaires*

si $f(-t) = f(t)$ $\quad B_n = 0$

si $f(-t) = -f(t)$ $\quad A_n = 0$

Décomposition en série de Fourier de $f(t)$

Force externe décomposée en *série de Fourier*

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_n^\infty \left(A_n \cos n\,\omega t + B_n \sin n\,\omega t \right) \quad (5.1)$$

Forme compacte de l'excitation

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_n^\infty F_n \cos\left(n\,\omega t - \psi_n \right) \quad (5.3)$$

avec

$$\begin{cases} F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \operatorname{tg} \psi_n = \dfrac{B_n}{A_n} \end{cases} \quad (5.4)$$

Décomposition en série de Fourier de $f(t)$

Forme compacte de l'excitation

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_{n}^{\infty} F_n \cos(n\,\omega t - \psi_n) \quad (5.3)$$

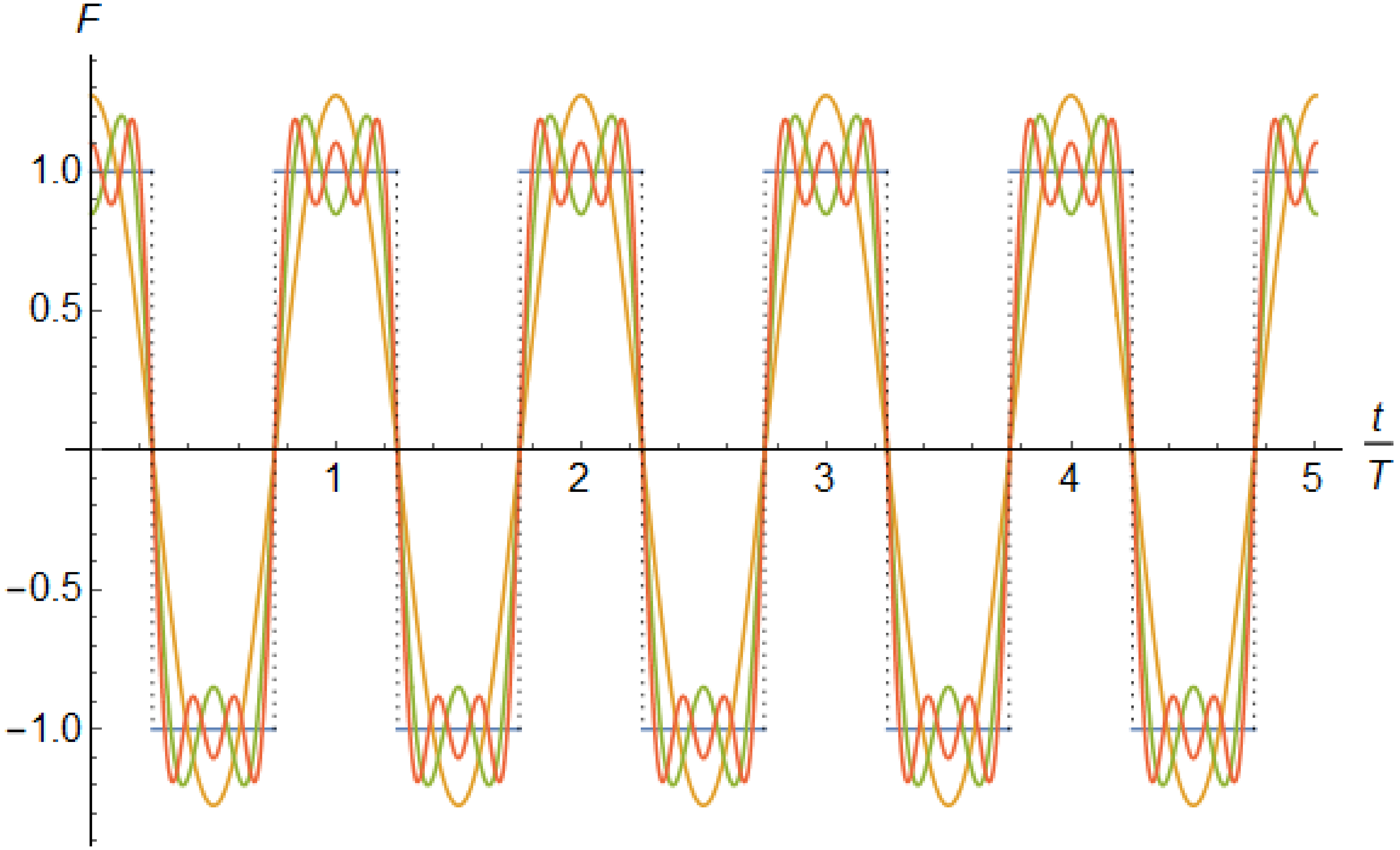
avec

$$\begin{cases} F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \operatorname{tg} \psi_n = \dfrac{B_n}{A_n} \end{cases} \quad (5.4)$$

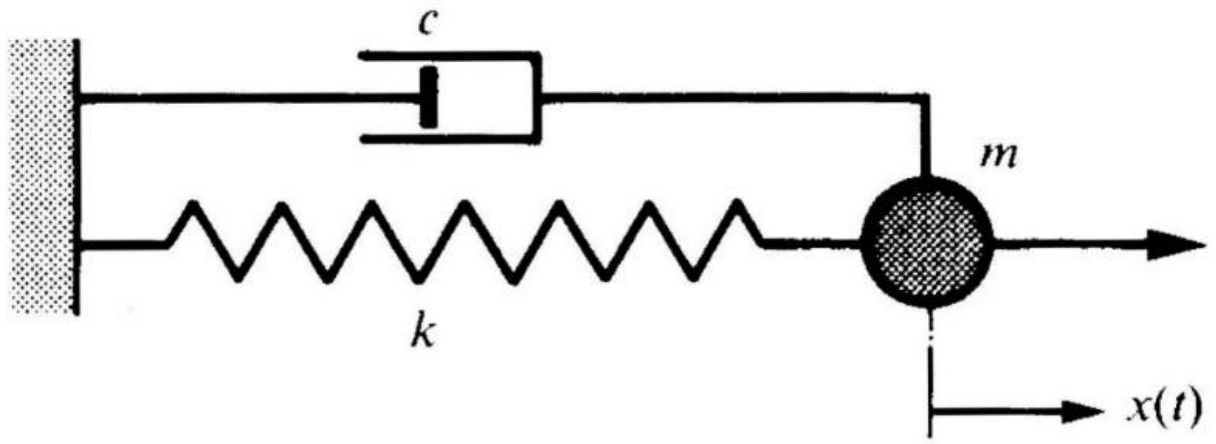
Fondamentale et *harmoniques* de la force extérieure

$$F_1 \cos(\omega t - \psi_1)$$

$$F_n \cos(n\,\omega t - \psi_n) \quad (n > 1)$$



Régime permanent périodique



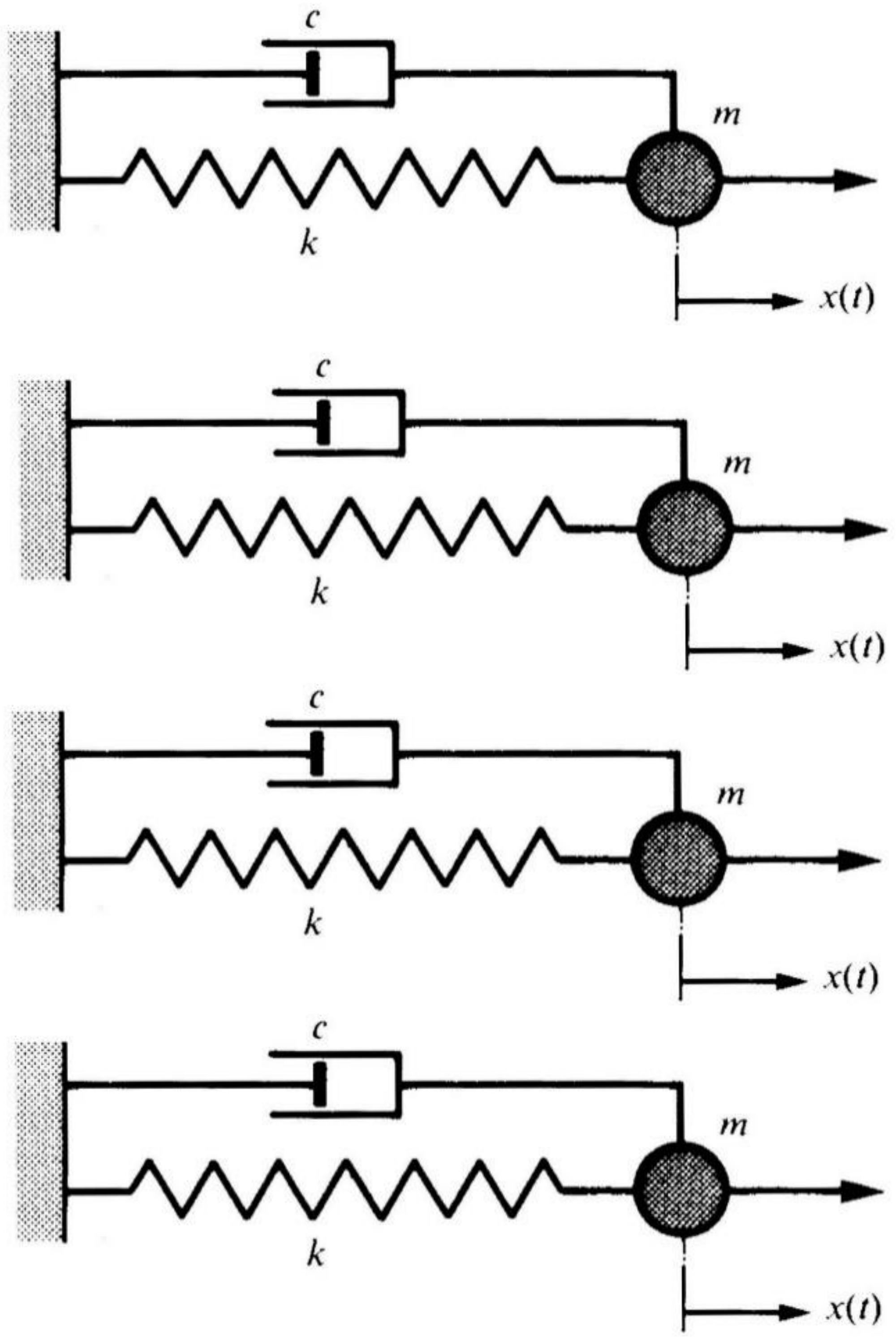
$\boldsymbol{f(t)}$

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = f(t)$$

$$f(t) = \frac{1}{2}F_0 + \sum_{n}^{\infty} F_n \cos\left(n\,\omega t - \psi_n\right) \qquad (5.3)$$

avec

$$\begin{cases} F_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \operatorname{tg}\psi_n = \dfrac{B_n}{A_n} \end{cases} \qquad (5.4)$$



$\dfrac{F_0}{2}$

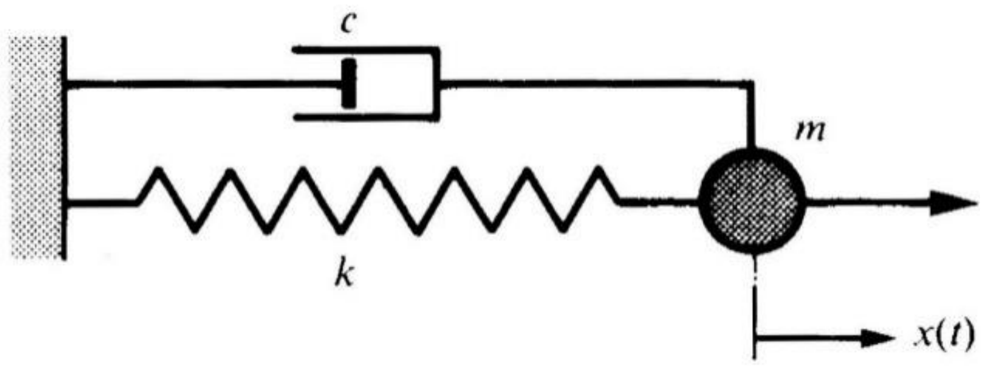
$F_1\cos(\omega t - \psi_1)$

$F_2\cos(2\omega t - \psi_2)$

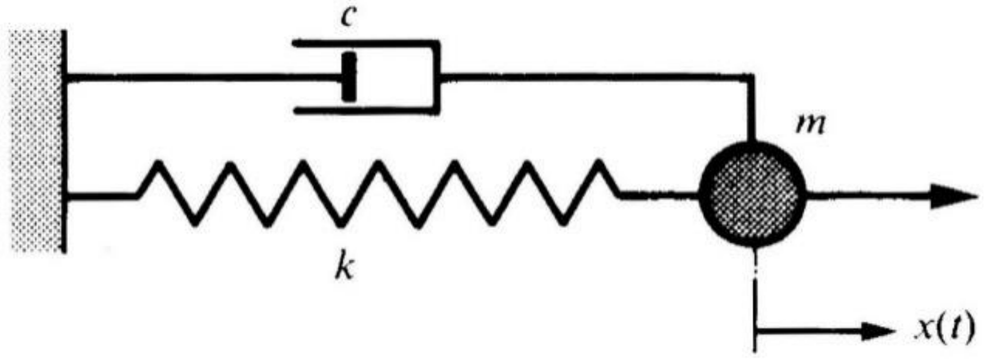
$F_3\cos(3\omega t - \psi_3)$

Régime permanent périodique

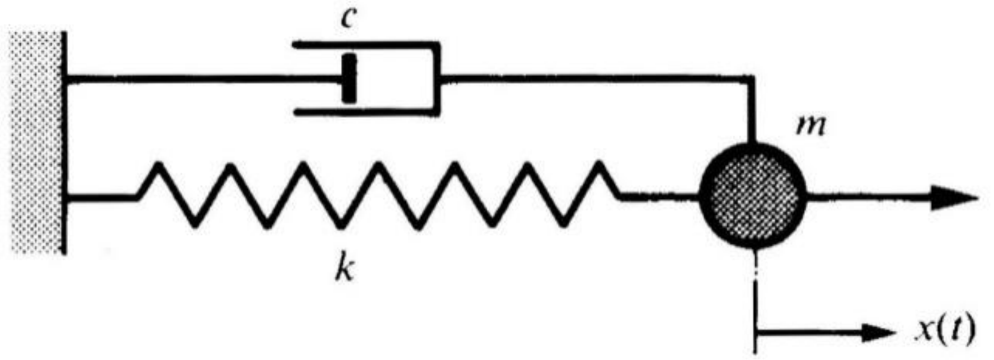
$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_n^\infty F_n \cos\left(n\,\omega t - \psi_n\right) \qquad (5.3)$$



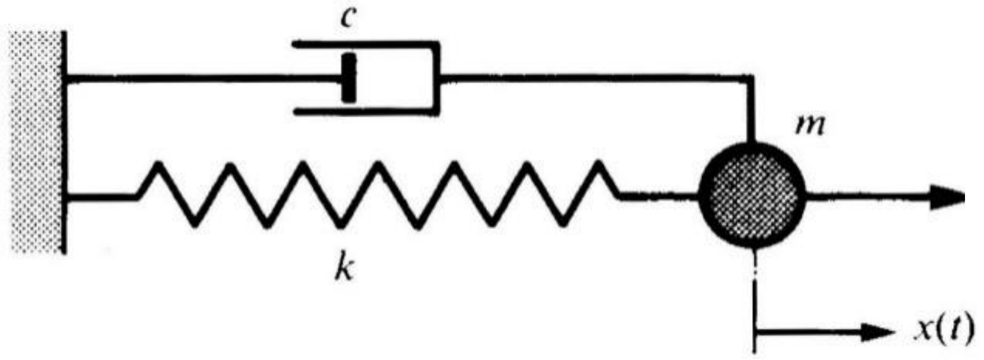
$\frac{F_0}{2}$



$F_1 \cos(\omega t - \psi_1)$



$F_2 \cos(2\omega t - \psi_2)$



$F_3 \cos(3\omega t - \psi_3)$

EPFL Permanent périodique – Notations complexes

$$f(t) = \frac{1}{2} F_0 + \sum_n^{\infty} F_n \cos(n\,\omega t - \psi_n) \qquad (5.3)$$

$$\underline{f}(t) = \sum_0^{\infty} \underline{f_n} = \frac{F_0}{2} + \sum_1^{\infty} F_n e^{-j\psi_n} e^{jn\omega t}$$

$$\text{avec } \underline{f_n} = F_n e^{-j\psi_n} = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) e^{-jn\omega t}\, dt$$

$$\underline{x}(t) = \sum_0^{\infty} \underline{x_n} = \frac{F_0}{2k} + \sum_1^{\infty} \underline{Y}(n\omega) F_n\, e^{j(n\omega t - \psi_n)} = \frac{F_0}{2k} + \sum_1^{\infty} \underline{H}(n\omega) \frac{F_n}{k}\, e^{j(n\omega t - \psi_n)} = \frac{F_0}{2k} + \sum_1^{\infty} \underline{H_n}(\omega) \frac{F_n}{k}\, e^{j(n\omega t - \psi_n)}$$

Réponse complexe en fréquence pour l'harmonique de rang n

$$\underline{H}_n = \frac{1}{\left(1 - n^2 \beta^2\right) + 2\, \mathrm{j}\, \eta\, n\, \beta} \qquad (5.23)$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_n}}{\sqrt{\left(1 - n^2 \beta^2\right)^2 + 4\, \eta^2 n^2 \beta^2}}$$

$$\underline{x_n} = \underline{H_n}(\omega) \frac{F_n}{k}\, e^{j(n\omega t - \psi_n)} = X_n e^{j(n\omega t - \psi_n - \varphi_n)}$$

Permanent périodique – Notations complexes

$$\underline{H_n}(\beta)\frac{1}{(1-\boldsymbol{n^2}\beta^2)+j2\eta\boldsymbol{n}\beta}$$

$$\underline{x_n}=\underline{H_n}(\omega)\frac{F_n}{k}\,e^{j(n\omega t-\psi_n)}=X_n e^{j(n\omega t-\psi_n-\varphi_n)}$$

Déphasage de l'harmonique de rang n

$$\operatorname{tg}\varphi_n=\frac{n\,\omega\,c}{k-n^2\,\omega^2\,m}=\frac{2\,\eta\,n\,\beta}{1-n^2\,\beta^2}\qquad(5.9)$$

Amplitude de l'harmonique de rang n

$$X_n=\left|\underline{H_n}\right|\frac{F_n}{k}=\mu_n X_{sn}\quad(5.6)$$

avec

$$X_{sn}=\frac{F_n}{k}\qquad(5.7)$$

$$\mu_n=\frac{1}{\sqrt{\left(1-n^2\,\beta^2\right)^2+4\,\eta^2\,n^2\,\beta^2}}\qquad(5.8)$$

Permanent périodique – Notations complexes

Déplacement en notations complexes

$$\underline{x}(t) = \frac{1/2\,F_0}{k} + \sum_{n}^{\infty} \underline{x}_n(t)$$

$$= \frac{1/2\,F_0}{k} + \sum_{n}^{\infty} X_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n\omega t - \psi_n - \varphi_n)} \qquad (5.24)$$

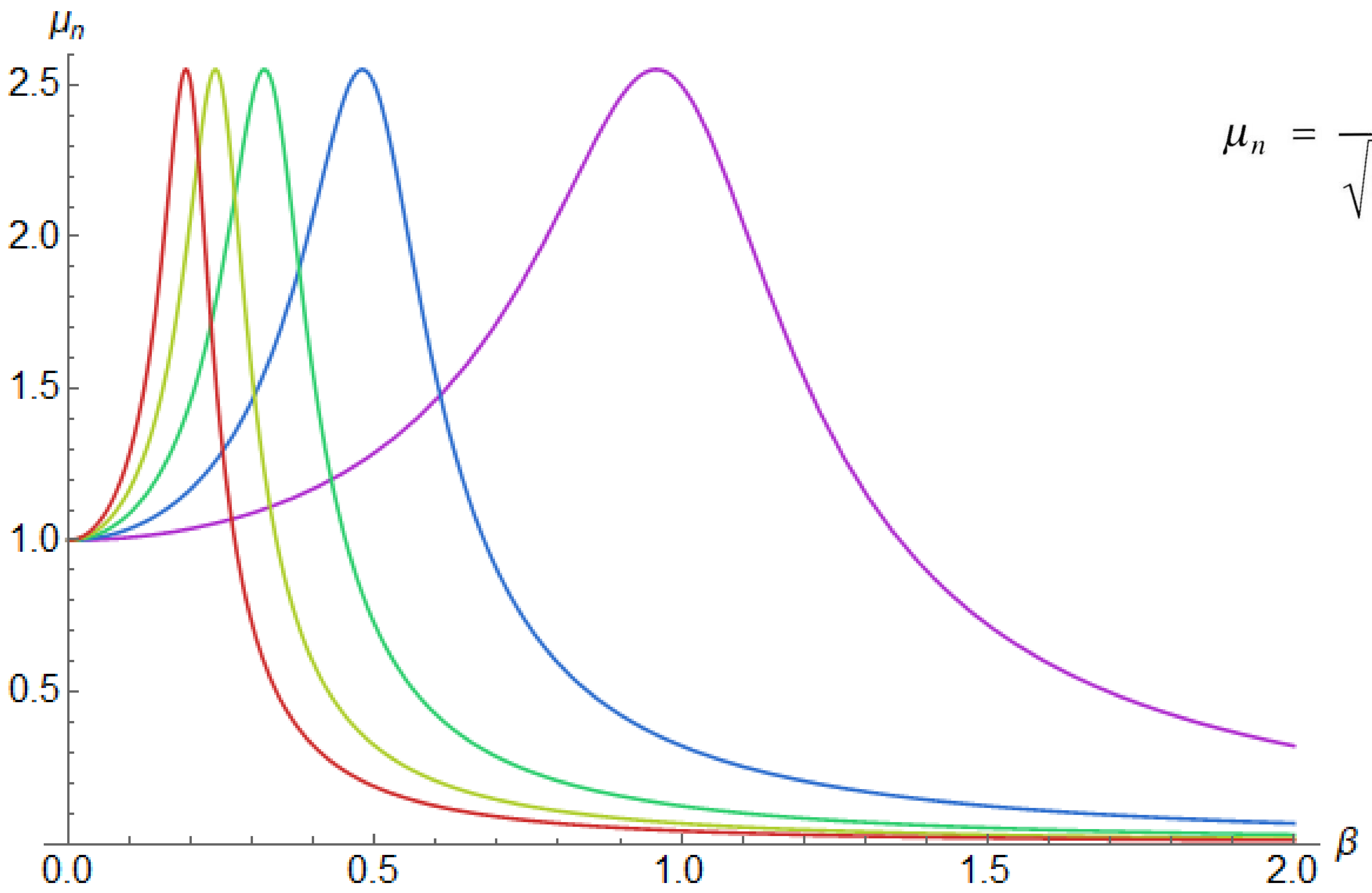
Déplacement réel

$$x(t) = \mathrm{Re}\,\underline{x}(t)$$

$$= \frac{1/2\,F_0}{k}$$

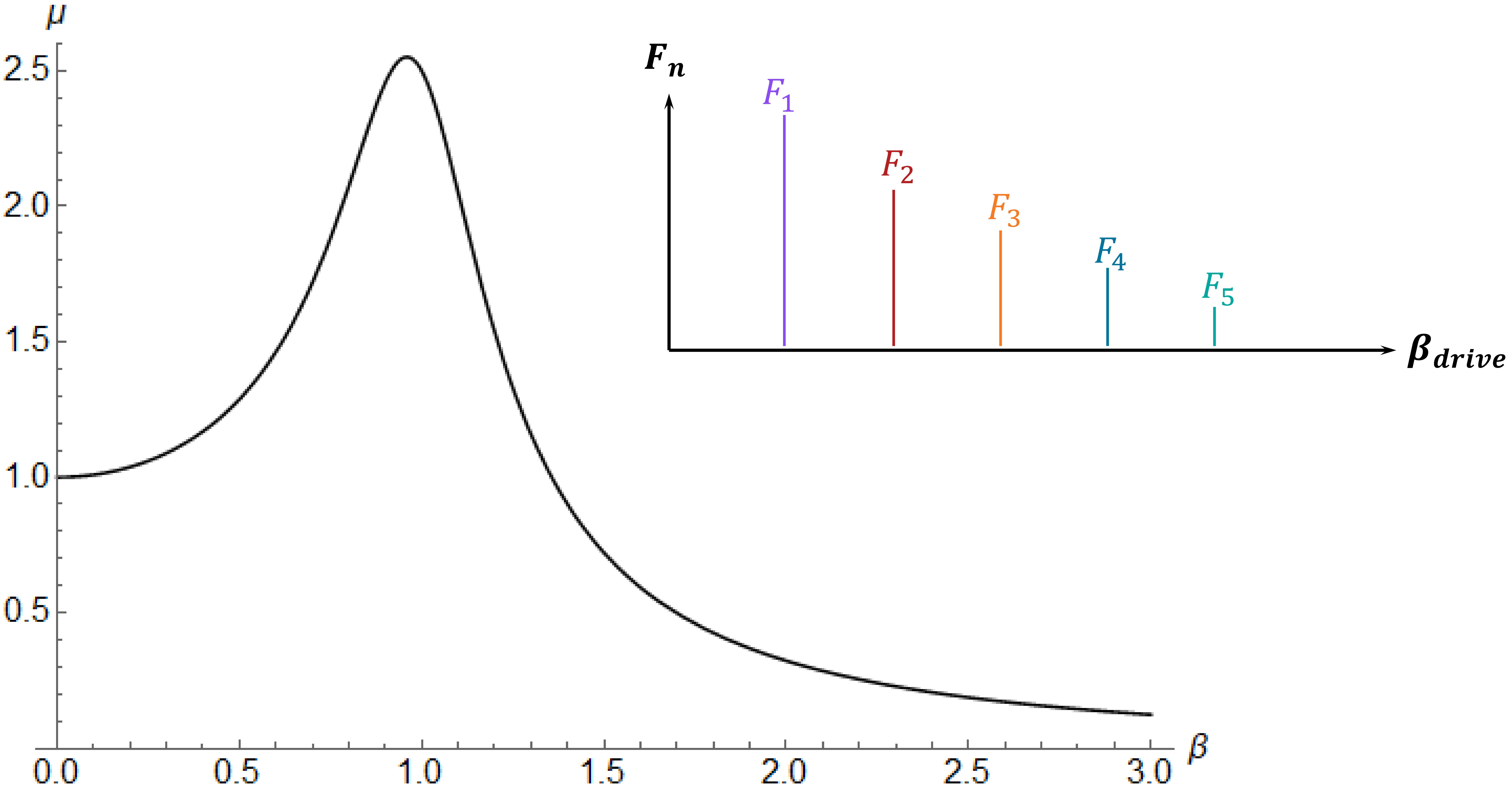
$$+ \sum_{n}^{\infty} X_n \cos\left(n\,\omega t - \psi_n - \varphi_n\right)$$

Notation du livre - μ_n

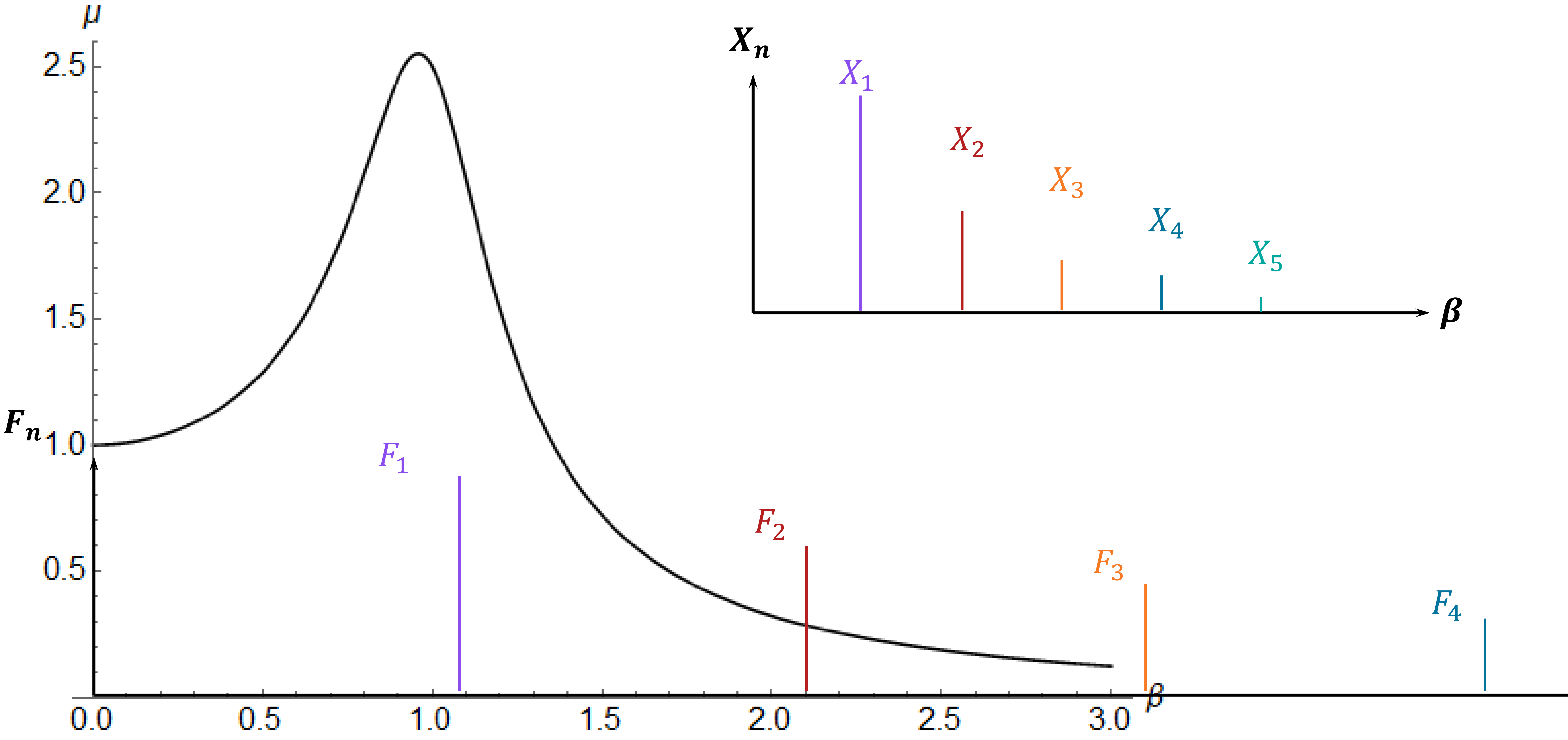


$$\mu_n = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - n^2\,\beta^2\right)^2 + 4\,\eta^2\,n^2\,\beta^2}}$$

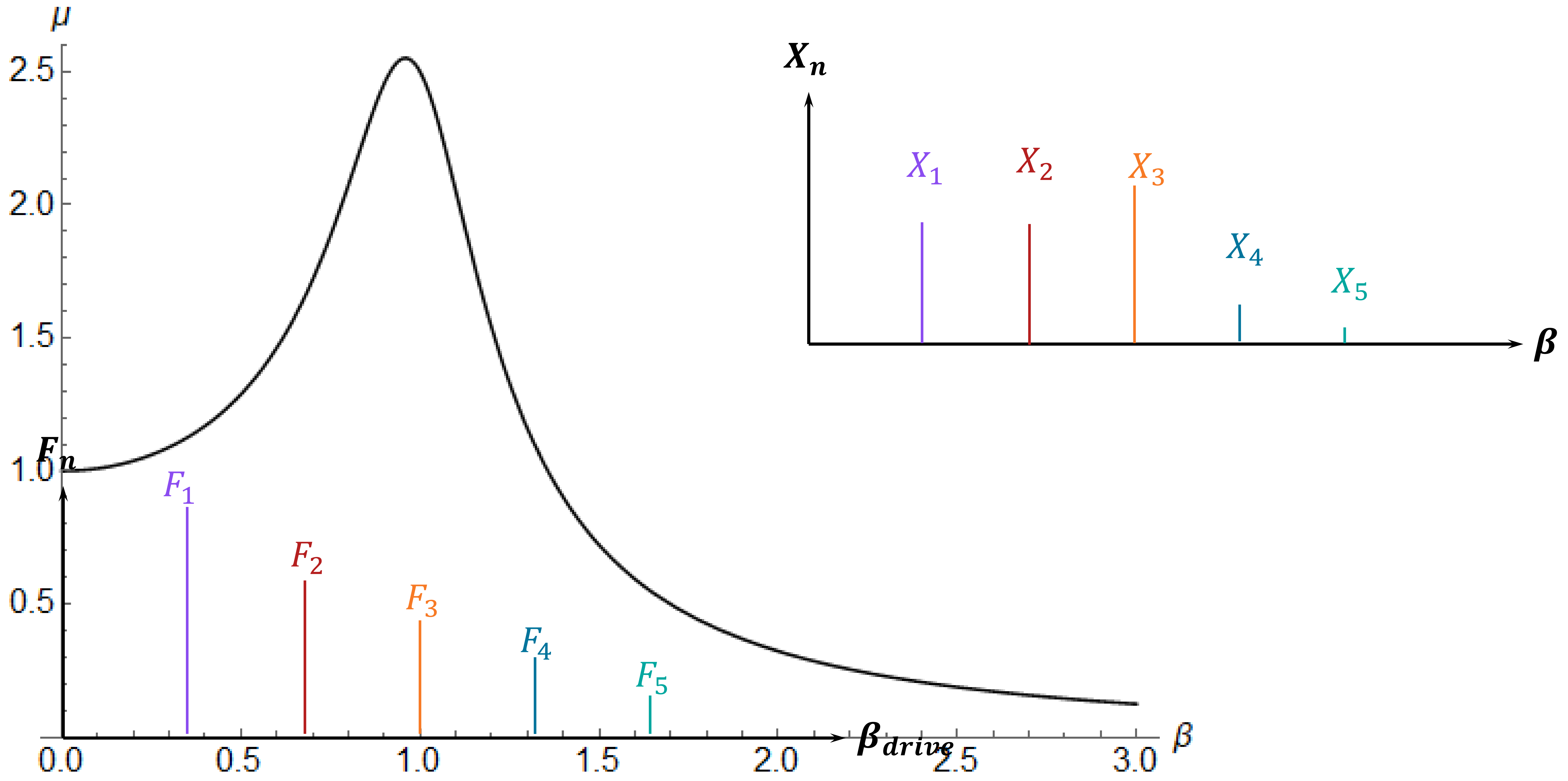
Point de vue de la décomposition de $f(t)$



Exemples de solutions – $\omega_{force} > \omega_0$

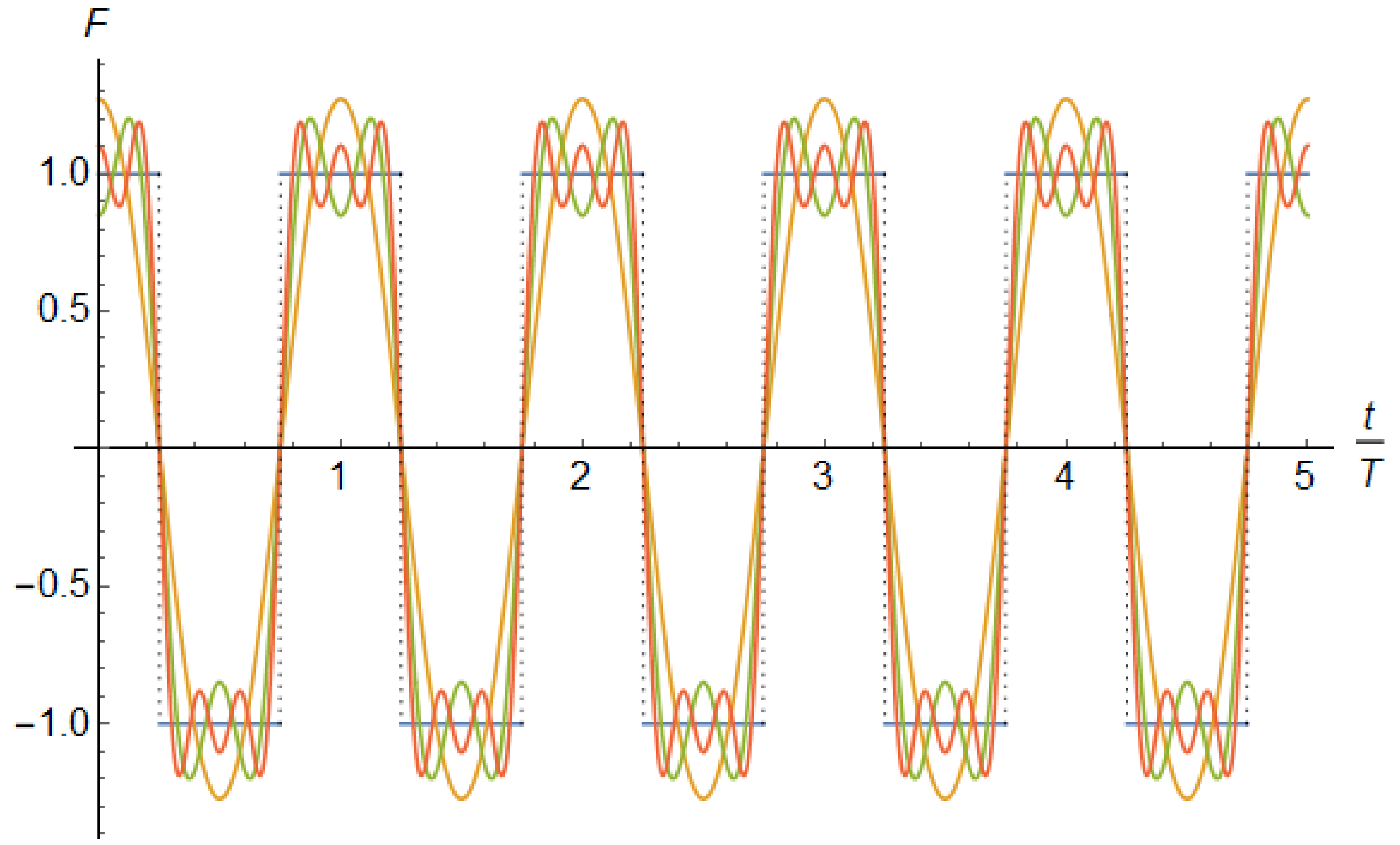


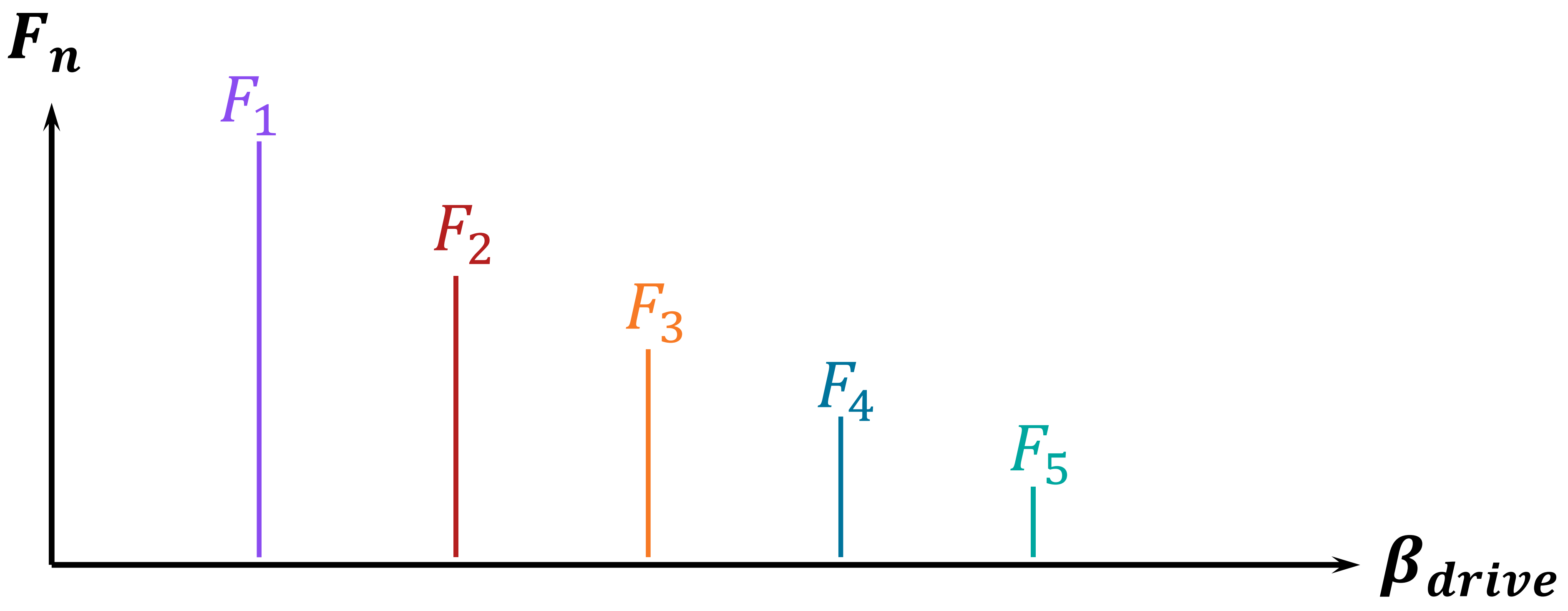
EPFL Exemples de solutions – $\omega_{force} \approx \omega_0/3$



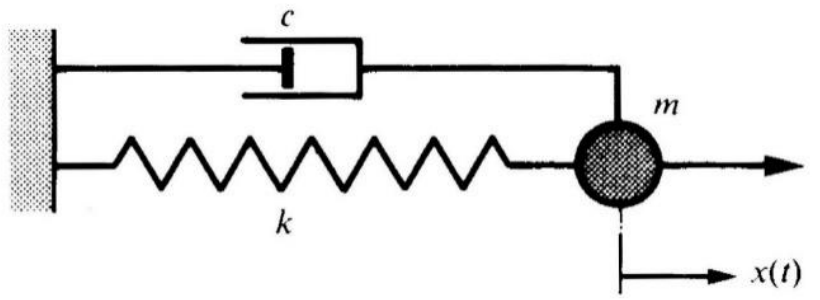
Résumé

- Décomposition de la force

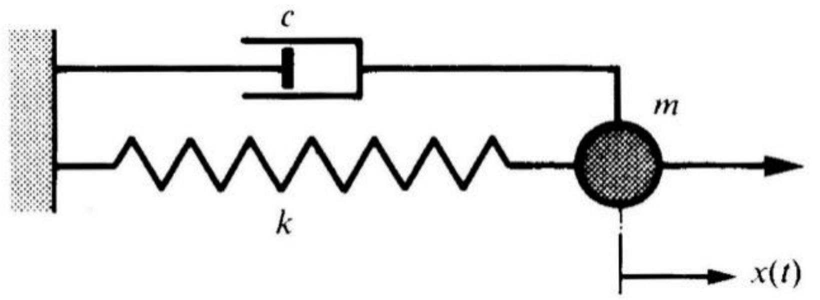




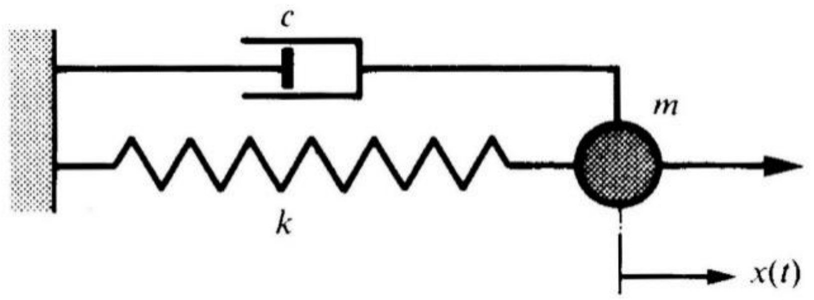
- Pour chaque composante de la force, on peut étudier un résonateur harmonique



$F_1\cos(\omega t-\psi_1)$



$F_2\cos(2\omega t-\psi_2)$



$F_3\cos(3\omega t-\psi_3)$